



**Zadania na XXII Podkarpacki Konkurs Matematyczny  
im. Franciszka Lejki  
Poziom II**

(klasy drugie liceum i technikum)

Finał

25 marca 2023r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Udowodnij, że dla dowolnych  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  takich, że  $a + b = 0$ ,  
 $c + d = 0$  zachodzi równość  
$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2})$$
2. Znaleźć wszystkie liczby naturalne  $n$ , aby liczby postaci  $n + 1$  i  $n - 50$   
były kwadratami liczb naturalnych.
3. Wyznacz wszystkie wartości wymierne parametru  $a$ , dla którego funkcja  
 $f(x) = ax^2 + (a + 1)x + a - 1$  ma dwa różne miejsca zerowe  
całkowite.
4. Symetralna przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego  $ABC$  przecina  
przeciwprostokątną  $AB$  w punkcie  $O$ , przyprostokątną  $AC$  ( $|AC| > |BC|$ )  
w punkcie  $K$ , a przedłużenie przyprostokątnej  $BC$  w punkcie  $M$ . Oblicz  
długości boków trójkąta  $ABC$  wiedząc, że  $|OK| = a$ ,  $|OM| = b$ .
5. W trójkącie  $ABC$  punkt  $D$  należy do boku  $AB$  i  $|AD| = 1$ ,  $|BD| = 2$ .  
Obliczyć długości boków  $AC$  i  $BC$  wiedząc, że  $|\angle BAC| = 45^\circ$ ,  
 $|\angle BDC| = 60^\circ$ .

Powodzenia!